PROPRIÉTÉS MULTIPLICATIVES DES ENTIERS FRIABLES TRANSLATÉS

SARY DRAPPEAU

Abstract. An integer is said to be y-friable if its greatest prime factor $P(n)$ is less than y. In this paper, we study numbers of the shape $n-1$ when $P(n) \le y$ and $n \le x$. One expects that, statistically, their multiplicative behaviour resembles that of all integers less than x. Extending a result of Basquin [1], we estimate the mean value over shifted friable numbers of certain arithmetic functions when $(\log x)^c \le y$ for some positive c, showing a change in behaviour according to whether $\log y/\log\log x$ tends to infinity or not. In the same range in (x, y), we prove an Erdös-Kac-type theorem for shifted friable numbers, improving a result of Fouvry & Tenenbaum [4]. The results presented here are obtained using recent work of Harper [6] on the statistical distribution of friable numbers in arithmetic progressions.

1. Introduction

Un entier n est dit y-friable si son plus grand facteur premier $P(n)$ est inférieur ou égal à y, avec la convention $P(1) = 1$. On note $S(x, y)$ l'ensemble des entiers inférieurs à x qui sont y-friables, et $\Psi(x, y) := \operatorname{card} S(x, y)$. Il est intéressant d'étudier dans quelle mesure les propriétés multiplicatives des entiers friables translatés, de la forme $n - 1$ où $P(n) \le y$, sont similaires en moyenne à celles des entiers normaux, c'est-à-dire pris dans leur globalité. On pose $S^*(x, y) := S(x, y) \smallsetminus \{1\}$. Dans ce travail, on présente deux résultats concernant la répartition des entiers friables translatés, qui améliorent des estimations antérieures en faisant usage d'un article récent de Harper [6].

On étudie d'abord le problème du calcul de la valeur moyenne de fonctions arithmétiques sur les friables translatés. Cette question est abordée par Fouvry et Tenenbaum [3] pour le cas de la fonction $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, et récemment par Loiperdinger et Shparlinski [12] dans le cas de la fonction indicatrice d'Euler $\varphi(n)$, puis par Basquin [1] qui améliore leurs résultats.

Date: September 3, 2014.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11N25; Secondary 11N37.

Key words and phrases. Shifted friable numbers, saddle-point method, equidistribution in arithmetic progressions, Bombieri-Vinogradov.

À toute fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ on associe la fonction λ définie par

$$\lambda(n) := (f * \mu)(n) = \sum_{d|n} f(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

où μ désigne la fonction de Möbius, ainsi que la quantité

$$R_f(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n \in S^*(x,y)} f(n-1)$$

définie pour $2 \leq y \leq x$. On pose $u := (\log x)/\log y$, ainsi que le domaine

$$2 \leq \exp\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leq y \leq x \tag{H_ε}$$

où $\log_k x$ désigne le k-ième itéré du logarithme évalué en x. On s'intéresse au résultat suivant de Basquin [1].

Théorème A. *Pour toute fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ multiplicative vérifiant pour deux réels positifs B, β et tout $n \in \mathbf{N}$ l'inégalité $|\lambda(n)| \leq Bn^{-\beta}$, on a l'estimation*

$$R_f(x,y) = R_f(x,x) + O_{B,\beta}\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right) \qquad ((x,y) \in H_\varepsilon). \tag{1}$$

Sous l'hypothèse sur f de cet énoncé, le terme principal du membre de droite de (1) converge lorsque $x \to \infty$ vers la valeur moyenne de f, qui s'exprime en fonction de λ grâce à la relation

$$\lim_{x\to\infty} R_f(x,x) = \sum_{q \geq 1} \frac{\lambda(q)}{q}.$$

On établit ici une estimation de même nature que (1), valable pour des fonctions f plus générales et dans un plus grand domaine en (x,y). On note $u := (\log x)/\log y$ et $\alpha = \alpha(x,y)$ l'unique solution réelle positive à l'équation

$$\log x = \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1}.$$

On a $\alpha \in [0,1]$ et $1 - \alpha \sim \log(u+1)/\log y$ lorsque $\min\{y/\log x, u\} \to \infty$. Ainsi lorsque $y = (\log x)^\kappa$ pour $\kappa > 1$ fixé et $x \to \infty$, on a $\alpha \to 1 - 1/\kappa$. On pose également pour tout $\beta \in [0,1]$,

$$g_q(\beta) := \prod_{p|q} (1 - p^{-\beta}). \tag{2}$$

On note que $g_q(1) = \varphi(q)/q$.

Théorème 1. *Supposons que $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ soit une fonction telle que pour certains réels $B, \beta > 0$ on ait*

$$\sum_{q \geq 1} \frac{|\lambda(q)|}{q^{1-\beta}} \leq B, \tag{3}$$

*et telle que l'*une des deux conditions *suivantes soit vérifiée :*

(1) $|\lambda(n)| \leq B$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *et un certain* $B > 0$ *fixé,*

(2) f *est multiplicative,* λ *l'étant alors également.*

Alors il existe $c > 0$ *dépendant au plus de* β *telle que lorsque*

$$2 \leq (\log x)^c \leq y \leq x, \qquad \textit{on ait}$$

$$R_f(x,y) = \sum_{q\geq 1} \frac{\lambda(q) g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\left(\min\left\{\frac{1}{u}, \frac{\log(u+1)}{\log y}\right\}\right). \tag{4}$$

En particulier, on a dans le même domaine

$$R_f(x,y) = R_f(x,x) + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big). \tag{5}$$

Remarque. Lorsque f est multiplicative, le terme principal du membre de droite de (4) peut s'écrire comme un produit eulérien :

$$\sum_{q\geq 1} \frac{\lambda(q) g_q(\alpha)}{\varphi(q)} = \prod_p \Big(1 + \frac{1-p^{-\alpha}}{1-p^{-1}} \sum_{\nu\geq 1} \frac{\lambda(p^\nu)}{p^\nu}\Big). \tag{6}$$

On rappelle que la quantité α dépend implicitement de x et y.

L'estimation (5) correspond à l'approximation du terme principal de (4) par sa valeur au point $\alpha = 1$. Si cette valeur est non nulle, l'estimation (5) n'est un équivalent asymptotique que lorsque $\alpha \to 1$ ou de façon équivalente $\log y/\log_2 x \to \infty$. Par ailleurs le terme d'erreur de (4) est borné par $O(\log_2 x/\sqrt{\log x})$ uniformément par rapport à y.

Une autre question concernant les friables translatés et étudiée par Fouvry et Tenenbaum [4] est leur nombre de facteurs premiers distincts. On note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de $n > 1$, et $\omega(1) = 0$. Posant pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $2 \leq y \leq x$,

$$\Phi(t) := \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-v^2/2} \mathrm{d}v/\sqrt{2\pi}$$

$$\Psi(x,y;t) := \mathrm{card}\left\{n \in S^*(x,y) \;\middle|\; \frac{\omega(n-1) - \log_2 x}{\sqrt{\log_2 x}} \leq t\right\},$$

Fouvry et Tenenbaum obtiennent l'estimation suivante.

Théorème B. *Soit* A *un réel positif. Lorsque* $t \in \mathbf{R}$ *et*

$$\exp\{(\log x)/(\log_2 x)^A\} \leq y \leq x, \quad \textit{on a}$$

$$\frac{\Psi(x,y;t)}{\Psi(x,y)} = \Phi(t) + O\left(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right). \tag{7}$$

Dans le cas $y = x$ ceci découle du théorème d'Erdös-Kac (*cf.* par exemple le théorème III.4.15 de [14]). On montre ici que cette estimation est valable dans un plus large domaine en (x, y).

Théorème 2. *Il existe un réel $c > 0$ telle que l'estimation* (7) *soit valable uniformément lorsque $t \in \mathbf{R}$ et $2 \leq (\log x)^c \leq y \leq x$.*

Remerciements. L'auteur est très reconnaissant à son directeur de thèse Régis de la Bretèche pour ses remarques et conseils durant la rédaction de ce papier, ainsi qu'à Gérald Tenenbaum pour sa relecture et ses encouragements.

2. Théorème de Bombieri-Vinogradov pondéré pour les entiers friables

On définit pour tous $a, q \in \mathbf{N}$ et tous réels x, y avec $2 \leq y \leq x$

$$\Psi(x, y; a, q) := \text{card } \{n \in S(x, y) \mid n \equiv a (\text{mod } q)\},$$

$$\Psi_q(x, y) := \text{card } \{n \in S(x, y) \mid (n, q) = 1\},$$

et on note

$$H(u) := \exp\left\{\frac{u}{\log(u+2)^2}\right\}.$$

Un aspect important de l'étude des entiers friables est la question de l'uniformité des résultats en y. Par exemple, Hildebrand [8] a montré que l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion que pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\Psi(x, y) \sim_\varepsilon x\rho(u) \quad (x \to \infty, (\log x)^{2+\varepsilon} \leq y \leq x) \tag{8}$$

où ρ est la fonction de Dickman, solution continue sur $\mathbf{R}_+$ de l'équation

$$u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0$$

avec la condition initiale $\rho(u) = 1$ pour $u \in [0, 1]$, ainsi que la convention $\rho(u) = 0$ si $u < 0$. Dans [9], Hildebrand montre que l'assertion (8) est vraie lorsque $x, y \to \infty$ avec $(x, y) \in (H_\varepsilon)$, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé. L'exposant $5/3$ dans la définition de (H_ε) est lié à l'exposant $2/3$ apparaissant dans la région sans zéro de ζ de Vinogradov-Korobov.

Les travaux de Hildebrand et Tenenbaum [10] et La Bretèche et Tenenbaum [2], qui font usage de la méthode du col, élucident en partie le comportement de $\Psi(x, y)$ et plus généralement $\Psi_q(x, y)$, en dehors du domaine (H_ε), notamment par le biais de résultats locaux : on peut établir un lien entre les valeurs de $\Psi_q(x, y)$ et celles de $\Psi(x, y)$ même pour des valeurs de y où aucune approximation régulière de $\Psi(x, y)$ n'est connue. On a en particulier les deux résultats suivants.

Lemme C. *(i) Lorsque $x, y \in \mathbf{R}$ et $m \in \mathbf{N}$ vérifient*

$$2 \leq (\log x)^2 \leq y \leq x, \quad P(m) \leq y, \quad \textit{et} \quad \omega(m) \ll \sqrt{y},$$

on a

(9)
$$\Psi_m(x,y)=\Psi(x,y)g_m(\alpha)\left\{1+O\left(\frac{E_m(1+E_m)}{u}\right)\right\}$$

où, ayant posé $\gamma_m:=\log(\omega(m)+2)\log(u+1)/\log y$, $E_m=E_m(x,y)$ *vérifie*

(10)
$$E_m\ll(\log u)^{-1}\Big\{\exp(2\gamma_m)-1\Big\}.$$

(ii) Soit $\varepsilon>0$. *Lorsque* $m\in\mathbf{N}$ *vérifie* $P(m)\le y$ *et* $\omega(m)\ll\sqrt{y}$, *on a*

(11)
$$\Psi_m(x,y)=\Psi(x,y)\Big\{\frac{\varphi(m)}{m}+O_\varepsilon\Big(\frac{2^{\omega(m)}\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}\qquad((x,y)\in(H_\varepsilon)).$$

Proof. La formule (9) est un cas particulier du théorème 2.1 de [2]. La formule (11) découle aisément des calculs de Fouvry–Tenenbaum [4] ; on en reprend ici la démonstration. Posons pour $t\in\mathbf{R}$ et $2\le y\le x$,

$$R_m(t):=\frac{1}{t}\text{card }\{n\le t,(n,m)=1\},$$

$$\Lambda_m(x,y):=\begin{cases}x\int_{-\infty}^{\infty}\rho(u-v)\mathrm{d}R_m(y^v), & x\notin\mathbf{N},\\ \Lambda_m(x-0,y) & \text{sinon.}\end{cases}$$

L'estimation (4.1) de [2] montre qu'afin d'établir la formule (11) il suffit de montrer que

(12)
$$\Lambda_m(x,y)=\frac{\varphi(m)}{m}\Psi(x,y)+O\left(\Psi(x,y)\frac{2^{\omega(m)}\log(u+1)}{\log y}\right)$$

On suppose sans perte de généralité que $x\notin\mathbf{N}$. Il découle d'une intégration par parties (ou de la formule (4.22) de [4] avec $k=0$) que l'on a

(13)
$$\frac{\Lambda_m(x,y)}{x}=\frac{\varphi(m)}{m}\rho(u)+\Big\{R_m(x)-\frac{\varphi(m)}{m}\Big\}-\int_0^\infty\rho'(u-v)\Big\{\frac{\varphi(m)}{m}-R_m(y^v)\Big\}\mathrm{d}v,$$

où ρ' est définie sur $\mathbf{R}$ comme la dérivée à droite de la fonction ρ. On a par une inversion de Möbius $R_m(t)=\varphi(m)m^{-1}+O(2^{\omega(m)}t^{-1})$ pour $t\ge0$; en injectant cela ainsi que l'estimation (4.4) de [4] dans le membre de droite de (13), on obtient l'estimation

$$\Lambda_m(x,y)=\frac{\varphi(m)}{m}x\rho(u)+O\Big(x2^{\omega(m)}\Big\{\frac{\rho(u)\log(u+1)}{\log y}+\frac{1}{x}\Big\}\Big)$$

et on en déduit l'estimation voulue (12) lorsque $(x,y)\in(H_\varepsilon)$, grâce au théorème de Hildebrand [9, theorem]. □

Considérons maintenant $\Psi(x,y;a,q)$. Cette quantité est nulle lorsque le pgcd $d:=(a,q)$ n'est pas un entier y-friable ; dans le cas contraire, on $\Psi(x,y;a,q)=\Psi(x/d,y;a/d,q/d)$. Ainsi on peut toujours se ramener au cas où $(a,q)=1$. Dans ce cas on sait suite à des travaux de Soundararajan [13] précisés par Harper [7] qu'il y a équirépartition dans une large mesure : pour tout $\varepsilon>0$, la relation

$$\Psi(x,y;a,q)\sim_\varepsilon \frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}$$

est valable lorsque $(a,q)=1$, $\log x/\log q\to\infty$, $y\geq y_0(\varepsilon)$ et $q\leq y^{4\sqrt{e}-\varepsilon}$. Comme le mentionnent Granville [5] et Soundararajan [13], il paraît difficile d'améliorer la valeur $4\sqrt{e}$ de l'exposant. Il est cependant possible d'obtenir des résultats si l'on considère le problème plus faible de l'erreur moyenne de la répartition de $S(x,y)$ dans les différentes classes modulo q pour $q\leq Q$ avec Q de l'ordre d'une puissance de x. Les Théorèmes 1 et 2 découlent plus précisément de bonnes estimations pour la quantité

$$\Delta(x,y;Q):=\sum_{q\leq Q}\left|\Psi(x,y;1,q)-\frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}\right|.$$

Fouvry et Tenenbaum [4] donnent un panorama des résultats antérieurs et obtiennent pour tous réels positifs ε, A fixés la majoration

$$\Delta(x,y;\sqrt{x}\exp\{-(\log x)^{1/3}\})\ll\Psi(x,y)H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}$$

lorsque $\exp\{(\log x)^{2/3+\varepsilon}\}\leq y\leq x$, pour un certain $\delta=\delta(\varepsilon,A)$. Harper [6], améliorant leurs résultats, obtient pour tout $A>0$ et $Q\leq\sqrt{\Psi(x,y)}$, et pour deux constantes absolues $c,\delta>0$ la majoration

$$\Delta(x,y;Q)\ll_A \Psi(x,y)\{y^{-\delta}+H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}\}+Q\sqrt{\Psi(x,y)}(\log x)^4$$

lorsque $(\log x)^c\leq y\leq x$. C'est cette majoration qui est à l'œuvre dans les Théorèmes 1 et 2.

La proposition qui suit est une version pondérée de [6, theorem 1].

Proposition 1. *Soit* $\vartheta>0$*. Il existe trois constantes* $c,\delta,\eta>0$ *pouvant dépendre de* ϑ *telles que lorsque* $2\leq(\log x)^c\leq y\leq x$ *et* $1\leq Q\leq\sqrt{\Psi(x,y)}$*, pour toute fonction* $\lambda:\mathbf{N}\to\mathbf{R}_+$ *vérifiant pour un certain* $B\geq 0$ *les conditions suivantes :*

(i) $\lambda(mn)\leq\lambda(m)\lambda(n)\qquad((m,n)\in\mathbf{N}^2)$,
(ii) $\sum_{n\leq z}\lambda(n)\ll z(\log z)^B\qquad(z\geq 2)$,
(iii) $\lambda(n)\ll n^{1-\vartheta}\qquad(n\geq 1)$,

et pour tout $A>0$, on ait

$$\begin{aligned}\sum_{q\le Q}\lambda(q)\max_{(a,q)=1}&\left|\Psi(x,y;a,q)-\frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}\right|\\ &=O_B\left(\Psi(x,y)\Big\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}+y^{-\delta}\Big\}\right)\\ &\quad+O\bigg((\log x)^6\sqrt{\Psi(x,y)}\Big\{Q+\sqrt{\Psi(x,y)}x^{-\eta/2}\Big\}\max_{q\le Q}\lambda(q)\bigg).\end{aligned}\tag{14}$$

De plus, lorsque $Q\le x^\eta$, le membre de gauche de (14) *est*

$$O_B\left(\Psi(x,y)\Big\{H(u)^{-\delta}(\log x)^{-A}+y^{-\delta}\Big\}\right).$$

Autrement dit, le deuxième terme d'erreur de (14) *n'est à prendre en compte que lorsque $Q>x^\eta$.*

Proof. Le résultat énoncé dans [6, theorem 1] correspond au cas particulier $\lambda=\mathbf{1}$. Le cas général se montre par une méthode exactement identique, c'est pourquoi on se contente ici d'indiquer les modifications à apporter à la preuve de [6, theorem 1].

Le membre de gauche de (14) est majoré par

$$\sum_{1<r\le Q}\sum_{\substack{\chi^*(\mathrm{mod}\ r)\\ \chi^*\ \text{primitif}}}\sum_{q\le Q}\frac{\lambda(q)}{\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\ q)\\ \chi\ \text{induit par}\ \chi^*}}\left|\sum_{n\in S(x,y)}\chi(n)\right|.\tag{15}$$

Pour tout $\eta>0$ fixé, les calculs de Harper (voir la proposition 2 et le paragraphe 4.4 de [6]) montrent que la contribution des indices $r>x^\eta$ à la première somme de (15) est

$$O\left((\log x)^{7/2}\sqrt{\Psi(x,y)}\left\{Q+x^{1/2-\eta}(\log x)^2\right\}\max_{q\le Q}\lambda(q)\right)$$

en majorant trivialement $\lambda(q)$. Ceci fournit le second terme d'erreur de (14) en remarquant que $\Psi(x,y)\gg x^{1-\eta}$ lorsque c est choisi suffisamment grand en fonction de η.

Il s'agit ensuite de vérifier que la contribution des indices $r\le x^\eta$ à la première somme de (15) vérifie la majoration

$$\sum_{1<r\le x^\eta}\sum_{\substack{\chi^*(\mathrm{mod}\ r)\\ \chi^*\ \text{primitif}}}\sum_{q\le Q}\frac{\lambda(q)}{\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi(\mathrm{mod}\ q)\\ \chi\ \text{induit par}\ \chi^*}}\left|\sum_{n\in S(x,y)}\chi(n)\right|\ll\Psi(x,y)\left(H(u)^{-c_2}+y^{-c_2}\right).$$

Cela est l'analogue de la formule (3.1) de [6] ; il convient de modifier la preuve de Harper de la façon suivante. Tout d'abord, il faut changer la définition de $\mathcal{G}_2$ en remplaçant la condition $\mathfrak{Re}(s)>299/300$ par $\mathfrak{Re}(s)>1-\vartheta/300$. Lors la majoration de la contribution des caractères de $\mathcal{G}_2$, il convient de poser

$$\epsilon:=\min\{\vartheta/300,(10\log r)/\log y\}$$

en vérifiant que ce choix de ϵ vérifie encore $40\log\log(qyH)/\log y \le \epsilon$, quitte à augmenter la valeur de c (appellée K dans la notation de [6]), et quitte à diminuer celle de η en fonction de ϑ. Le reste des calculs sont valables avec le poids $\lambda(q)$ grâce aux propriétés suivantes, qui découlent des hypothèses sur λ :

(1) lorsque $q = rs$, on a $\lambda(q)/\varphi(q) \le \lambda(r)\lambda(s)/(\varphi(r)\varphi(s))$,

(2) on a $\sum_{s\le Q}\lambda(s)/\varphi(s) \ll (\log Q)^{B+2}$ ainsi que $\sum_{r\ge R}\lambda(r)/r^2 \ll (\log R)^B/R$,

(3) étant donné $R \ge 1$, on a

$$\sum_{R<r\le 2R}\ \sideset{}{^\sharp}\sum_{\chi^* \,(\mathrm{mod}\ r)} \frac{\lambda(r)}{\varphi(r)} \ll \frac{\log_2 R}{R^\vartheta}(R^{102})^{(5/2)(\vartheta/300)} \ll R^{-\vartheta/10},$$

où la somme $\sum^\sharp$ porte sur les caractères primitifs χ^* modulo r tels que la série de Dirichlet associée $L(s,\chi^*)$ ait au moins un zéro $\rho = \beta + i\gamma$ avec $\beta > 1-\vartheta/300$ et $|\gamma| \le r^{100}$,

(4) on a enfin pour tout $r \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{\substack{q\le Q\\ r|q}} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \sum_{d|q/r} \frac{1}{\sqrt{d}} \ll \frac{\lambda(r)}{\varphi(r)} \sum_{d\le Q/r} \frac{\lambda(d)}{\sqrt{d}\varphi(d)} \sum_{m\le Q/(rd)} \frac{\lambda(m)}{\varphi(m)} \ll (\log Q)^{B+2}\frac{\lambda(r)}{\varphi(r)}.$$

Les facteurs additionnels provenant de ces modifications sont tous $O((\log x)^{c_3})$ pour un certain réel $c_3 = c_3(B) > 0$, et cela est absorbé dans le terme d'erreur quitte à diviser par 2 la valeur de δ. $\square$

3. Valeur moyenne de certaines fonctions arithmétiques

On démontre dans cette section le Théorème 1. On se place dans un cadre qui regroupe les deux hypothèses possibles sur f : on suppose qu'il existe une fonction $\widetilde{\lambda} : \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ telle que l'on ait

(i) $\forall n \in \mathbf{N}$, $|\lambda(n)| \le B\widetilde{\lambda}(n)$,

(ii) $\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2$, $\widetilde{\lambda}(mn) \le \widetilde{\lambda}(m)\widetilde{\lambda}(n)$,

(iii) $\forall z \ge 2, \sum_{n\le z}\widetilde{\lambda}(n) \le Bz(\log z)^B$,

(iv) $\widetilde{\lambda}(n) \le Bn^{1-\beta}$.

Lorsque $\lambda(n) \le B$ (resp. λ est multiplicative), le choix $\widetilde{\lambda} = \mathbf{1}$ (resp. $\widetilde{\lambda} = |\lambda|$) est admissible. On rappelle que l'on dispose en plus de la majoration (3).

Soit $c \ge 2$ un réel. On suppose $(\log x)^c \le y \le x$. On remarque tout d'abord que sous ces hypothèses,

$$\sum_{q\ge 1}\frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} = \sum_{q\ge 1}\frac{\lambda(q)}{q} + O_{B,\beta}\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big). \tag{16}$$

En effet, puisque $\alpha \gg 1$, on a $\sup_{\beta\in[\alpha,1]}|g_q'(\beta)| \ll \log q$, ainsi $g_q(\alpha) = g_q(1) + O((\log q)(1-\alpha))$. L'estimation (16) découle alors de la majoration $\sum_q \lambda(q)\log q/\varphi(q) \ll_{B,\beta} 1$ ainsi que de [14, formule III.5.74]. Comme

on a
$$\frac{1}{u} \leq \frac{\log(u+1)}{\log y} \Leftrightarrow \log y \leq \{1/2+\varepsilon(x)\}\sqrt{\log x \log_2 x}$$
pour une certaine fonction $\varepsilon(x) = o(1)$, on en conclut que l'estimation (4) implique (5), et que ces deux estimations sont en réalité équivalentes lorsque $y \geq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$.

On suppose toujours $(\log x)^c \leq y \leq x$. On part de l'expression
$$R_f(x,y) = \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{q\geq 1} \lambda(q)\{\Psi(x,y;1,q) - 1\}$$
obtenue en écrivant $f(n) = \sum_{q|n} \lambda(q)$ et en intervertissant les sommes. Posons
$$Q := \left\lceil \left(\frac{x(\log x)^2}{\Psi(x,y)}\right)^{1/\beta} \right\rceil.$$
Lorsque x tend vers l'infini, on a $\Psi(x,y) = x^{\alpha+o(1)}$, donc $Q = x^{(1-\alpha)/\beta+o(1)}$. Une majoration triviale ainsi que l'hypothèse (3) fournissent
$$\sum_{q>Q} \lambda(q)\{\Psi(x,y;1,q)-1\} \ll x \sum_{q>Q} \frac{|\lambda(q)|}{q} \leq BxQ^{-\beta} \leq B\frac{\Psi(x,y)}{(\log x)^2}.$$
On applique la Proposition 1 avec le poids $\widetilde{\lambda}$ pour $\vartheta = \beta$. Si η est le réel positif donné par cette proposition, quitte à supposer c suffisamment grand en fonction de β, on a $Q \leq x^\eta$. Par ailleurs $\sum_{q\leq Q} |\lambda(q)| \leq BQ$, on obtient donc
$$\sum_{q\leq Q} \lambda(q) \left\{\Psi(x,y;1,q) - \frac{1}{\varphi(q)}\Psi_q(x,y)\right\} \ll_B \frac{\Psi(x,y)}{\log x}.$$
Ainsi,
$$R_f(x,y) = \sum_{q\leq Q} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\Psi_q(x,y)}{\Psi(x,y)} + O_B\left(\frac{1}{\log x}\right). \tag{17}$$

Supposons tout d'abord $y \leq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$, de sorte que l'on a $1/u \ll \log(u+1)/\log y$. L'hypothèse (3) sur λ implique
$$\sum_{q>u^{2/\beta}} \frac{\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\Psi_q(x,y)}{\Psi(x,y)} \ll_{B,\beta} \frac{1}{u}$$
puisque $1/\varphi(q) \ll_\beta q^{-1+\beta/2}$. Lorsque c est supposé assez grand en fonction de β, les conditions de l'estimation (9) du Lemme C sont vérifiées avec $m = q$ lorsque $q \leq u^{2/\beta}$, et on a uniformément
$$\Psi_q(x,y) = g_q(\alpha)\Psi(x,y)\left\{1 + O\left(\frac{E_q(1+E_q)}{u}\right)\right\}$$
où E_q vérifie (10). On a $\log(\omega(q)+1) = o(\log q)$ lorsque $q \to \infty$, ainsi que $\log(u+2)/(\log y) \ll 1$. On en déduit que lorsque $q \to \infty$, $\gamma_q = o(\log q)$,

d'où $E_q = q^{o(1)}$, et ainsi

$$\sum_{q\leq u^{2/\beta}} \frac{|\lambda(q)|E_q(1+E_q)}{\varphi(q)} \ll_{B,\beta} 1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} R_f(x,y) &= \sum_{q\leq u^{2/\beta}} \frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\Big(\frac{1}{u}\Big) \\ &= \sum_{q\geq 1} \frac{\lambda(q)g_q(\alpha)}{\varphi(q)} + O_{B,\beta}\Big(\frac{1}{u}\Big) \end{aligned}$$

grâce à l'hypothèse (3), ce qui montre l'estimation (4) sous la condition $y \leq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$.

On suppose maintenant que $y \geq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$ et on reprend l'étude précédente à partir de la formule (17). Pour tout $q \in \mathbf{N}$, on note

$$q_y := \prod_{\substack{p^\nu || q \\ p\leq y}} p^\nu$$

le plus grand diviseur y-friable de q. On a $\Psi_q(x,y) = \Psi_{q_y}(x,y)$ ainsi que $\omega(q_y) \ll \log x \leq \sqrt{y}$ lorsque $q \leq x$, l'estimation (11) du Lemme C fournit donc

$$R_f(x,y) = \sum_{q\leq Q} \frac{\varphi(q_y)\lambda(q)}{q_y\varphi(q)} + O_B\Big(\frac{1}{\log x} + \sum_{q\in\mathbf{N}} \frac{2^{\omega(q)}\lambda(q)}{\varphi(q)} \frac{\log(u+1)}{\log y}\Big).$$

On a $2^{\omega(q)}q/\varphi(q) \ll_\beta q^\beta$, l'hypothèse (3) sur λ montre que le terme d'erreur est majoré par $O_{B,\beta}(\log(u+1)/\log y)$. Par ailleurs, on remarque que

$$\sum_{q\leq Q} \frac{\varphi(q_y)\lambda(q)}{q_y\varphi(q)} = \sum_{q\geq 1} \frac{\lambda(q)}{q} + O\Big(\sum_{q>\min\{Q,y\}} \frac{|\lambda(q)|}{\varphi(q)}\Big)$$

et le terme d'erreur est $O_{B,\beta}(y^{-\beta/2} + Q^{-\beta/2}) = O_{B,\beta}(\log(u+1)/\log y)$ par construction de Q. Cela montre l'estimation (5) lorsque $y \geq \exp\{\sqrt{\log x \log_2 x}\}$. L'estimation (4) en découle d'après (16).

4. Théorème d'Erdös-Kác sur les friables translatés

On démontre dans cette section le Théorème 2. On reprend la preuve de Fouvry et Tenenbaum [4], avec deux changements notables : le choix du paramètre Y et l'utilisation de la majoration (24) *infra.* Lorsque la condition $y \geq \exp\{\log x/(\log_2 x)^2\}$ est vérifiée, le corollaire 5 de [4] s'applique, on peut donc supposer sans perte de généralité $y \leq \exp\{\log x/(\log_2 x)^2\}$. En particulier $H(u)^{-\delta} \ll_\delta 1/\log x$. La Proposition 1 s'applique pour la valeur $\vartheta = 1/2$ et $\widetilde{\lambda}(n) = \tau(n)^3$ où $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ (l'hypothèse (ii) étant satisfaite avec $B = 7$) fournit, pour un réel positif δ et quitte à augmenter la valeur de c, l'estimation

$$\begin{aligned}\sum_{q\le Q}\tau(q)^3\max_{(a,q)=1}\left|\Psi(x,y;a,q)-\frac{\Psi_q(x,y)}{\varphi(q)}\right| \\ \ll \Psi(x,y)\left(H(u)^{-\delta}+y^{-\delta}\right)+\sqrt{\Psi(x,y)}Q^{9/8}(\log x)^6\end{aligned}\tag{18}$$

uniformément lorsque $2 \le (\log x)^c \le y \le x$ et $Q \le \sqrt{\Psi(x,y)}$. Il sera fait usage du résultat suivant, qui est issu de [11, Lemma].

Lemme D. *Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a*

$$\tau(n) \ll \sum_{d|n, d\le n^{1/3}} \tau(d)^3.$$

On pose $Y := \exp\{(\log x)/(\log_2 x)^c\}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\omega(n,Y) := \sum_{p|n, p\le Y} 1.$$

Pour tout $\kappa \in \mathbf{R}$, on a

$$\operatorname{card}\{n \in S^*(x,y) \mid \omega(n-1)-\omega(n-1,Y) > \kappa\} \le 2^{-\kappa}\sum_{n\in S^*(x,y)} 2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,Y)}.$$

Or on a grâce au Lemme D

$$2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,Y)} \le \sum_{\substack{d|n-1\\ P^-(d)>Y}} 1 \ll \sum_{\substack{d|n-1, d\le x^{1/3}\\ P^-(d)>Y}} \tau(d)^3$$

où $P^-(d)$ désigne le plus petit facteur premier de l'entier $d > 1$, avec la convention $P^-(1) = \infty$. Une interversion de sommation fournit

$$\operatorname{card}\{n \in S^*(x,y) \mid \omega(n-1)-\omega(n-1,Y) > \kappa\} \ll 2^{-\kappa}\sum_{\substack{d\le x^{1/3}\\ P^-(d)>Y}} \tau(d)^3\Psi(x,y;1,d).\tag{19}$$

Quitte à augmenter la valeur de c pour avoir $x^{3/4} \le \Psi(x,y)/(\log x)^8$, la formule (18) avec $Q = x^{1/3}$ et les calculs de [4] (plus précisément la formule précédant la formule (7.6)) montrent que le membre de droite de (19) est

$$\ll 2^{-\kappa}\sum_{\substack{d\le x^{1/3}\\ P^-(d)>Y}} \frac{\tau(d)^3\Psi_d(x,y)}{\varphi(d)} + O(2^{-\kappa}\Psi(x,y)) \ll 2^{-\kappa}(\log_2 x)^{8c}\Psi(x,y).$$

Le choix $\kappa = c_1\log_3 x$ pour $c_1 > 0$ fixé suffisamment grand en fonction de c assure que cela est $\ll \Psi(x,y)/\sqrt{\log_2 x}$.

On pose $\xi := \log_2 Y = \log_2 x + O(\log_3 x)$ et

$$\Psi^*(x,y;t) := \operatorname{card}\{n \in S^*(x,y) \mid \omega(n-1,Y) \le \xi + t\sqrt{\xi}\}.$$

On a

$$\text{card}\,\{n \in S^*(x,y) \mid \omega(n-1,Y) \le \log_2 x + t\sqrt{\log_2 x}\} = \Psi^*(x,y;\widetilde{t}\ )$$

pour un certain réel $\widetilde{t}$ dépendant de x et t, vérifiant

$$\widetilde{t} = t + O((1+|t|)\log_3 x/\sqrt{\log_2 x}).$$

L'argument qui précède montre donc que pour un certain $\kappa = O(\log_3 x)$ indépendant de t, on a

(20)
$$\Psi^*(x,y;\widetilde{t}-\kappa/\sqrt{\log_2 x}) + O\bigg(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\Psi(x,y)\bigg) \le \Psi(x,y;t) \le \Psi^*(x,y;\widetilde{t}\ )$$

Puisque l'on a

$$\max\{\Big|\Phi(\widetilde{t}) - \Phi(t)\Big|, \Big|\Phi(\widetilde{t}-\kappa/\sqrt{\log_2 x}) - \Phi(t)\Big|\} = O(\log_3 x/\sqrt{\log_2 x})$$

uniformément par rapport à t, il suffit de montrer l'estimation (7) avec $\Psi(x,y;t)$ remplacé par $\Psi^*(x,y;t)$. De même que dans [4], on fait appel à l'inégalité de Berry-Esseen sous la forme énoncée dans [14, théorème II.7.16] :

$$\sup_{t\in\mathbf{R}}\left|\frac{\Psi^*(x,y;t)}{\Psi(x,y)} - \Phi(t)\right| \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}} + \int_0^{\sqrt{\xi}} |R(x,y;\vartheta)|\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\vartheta} \tag{21}$$

avec

$$R(x,y;\vartheta) := \bigg(\frac{1}{\Psi(x,y)}\sum_{n\in S^*(x,y)} \mathrm{e}^{i\vartheta(\omega(n-1,Y)-\xi)/\sqrt{\xi}}\bigg) - \mathrm{e}^{-\vartheta^2/2}$$

en remarquant que $R(x,y;-\vartheta) = \overline{R(x,y;\vartheta)}$. On fixe $\vartheta \in [0,\sqrt{\xi}]$.

Suivant les calculs de [4, formule (7.10)], on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \vartheta^2 + \vartheta\bigg(\frac{1}{\xi\Psi(x,y)}\sum_{n\in S^*(x,y)}(\omega(n-1,Y)-\xi)^2\bigg)^{1/2}. \tag{22}$$

On a

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} \omega(n-1,Y) = \sum_{p\le Y}\Psi(x,y;1,p) + O(Y/\log Y),$$

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} \omega(n-1,Y)^2 = \sum_{p\le Y}\Psi(x,y;1,p) + \sum_{\substack{p,q\le Y\\ p\ne q}}\Psi(x,y;1,pq) + O(Y^2/\log^2 Y).$$

Quitte à augmenter la valeur de c, pour x assez grand on a $Y \le \sqrt{\Psi(x,y)}$, ainsi d'après [6, theorem 1] on a

$$\sum_{p\le Y}\Psi(x,y;1,p) = \sum_{p\le Y}\frac{\Psi_p(x,y)}{p-1} + O(\Psi(x,y)) = \xi\Psi(x,y) + O(\Psi(x,y))$$

où l'on a utilisé $\Psi_p(x,y) = \Psi(x,y)\{1 + O(1/p^\alpha + 1/u)\}$ pour tout $p \leq Y$, grâce à l'estimation (9) si $p \leq y$, l'égalité étant triviale sinon. De même,

$$\sum_{\substack{p,q \leq Y \\ p \neq q}} \Psi(x,y;1,pq) = \xi^2 \Psi(x,y) + O(\xi \Psi(x,y)).$$

On a donc en développant,

$$\sum_{n \in S^*(x,y)} (\omega(n-1,Y) - \xi)^2 = O(\xi \Psi(x,y))$$

et en reportant cela dans (22), on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \vartheta + \vartheta^2. \tag{23}$$

On montre ensuite une estimation plus précise que la précédente pour les valeurs de ϑ loin de 0. Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(m,Y)/\sqrt{\xi}} = \sum_{d|m, P(d) \leq Y} f_\vartheta(d)$ avec

$$f_\vartheta(d) := \mu^2(d)(\mathrm{e}^{i\vartheta/\sqrt{\xi}} - 1)^{\omega(d)} = O(\mu^2(d)\mathrm{e}^{-c_2\omega(d)})$$

pour un certain $c_2 > 0$, puisque $\vartheta/\sqrt{\xi} \leq 1 < \pi/3$. Lorsque d est sans facteur carré, on a $d \leq P(d)^{\omega(d)}$: on a donc pour tout $m \in \mathbf{N}$

$$\sum_{\substack{d|m, P(d) \leq Y \\ d > x^{1/3}}} f_\vartheta(d) \ll \mathrm{e}^{-c_3 \log x/\log Y} \tau(m) \ll \mathrm{e}^{-c_3(\log_2 x)^c} \sum_{d|m, d \leq m^{1/3}} \tau(d)^3 \tag{24}$$

pour un certain $c_3 > 0$, où l'on a utilisé le Lemme D. Une interversion de sommation fournit

$$\begin{aligned}\sum_{n \in S^*(x,y)} \sum_{\substack{d|n-1, P(d) \leq Y \\ d > x^{1/3}}} f_\vartheta(d) &\ll \mathrm{e}^{-c_3(\log_2 x)^c} \sum_{d \leq x^{1/3}} \tau(d)^3 \Psi(x,y;1,d) \\ &\ll \mathrm{e}^{-c_3(\log_2 x)^c} \prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{8}{p}\right) \Psi(x,y) \ll \frac{\Psi(x,y)}{\log x}.\end{aligned}$$

D'autre part, étant donné que $f_\vartheta(d) \ll 1$, le théorème 1 de [6] (ou la Proposition 1 pour $\widetilde{\lambda} = \mathbf{1}$) fournit, quitte à augmenter la valeur de c,

$$\sum_{d \leq x^{1/3}} f_\vartheta(d) \left\{ \Psi(x,y;1,d) - \frac{\Psi_d(x,y)}{\varphi(d)} \right\} \ll \frac{\Psi(x,y)}{\log x}.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}\sum_{n \in S^*(x,y)} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} &= \sum_{d \leq x^{1/3}, P(d) \leq Y} f_\vartheta(d) \Psi(x,y;1,d) + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log x}\right) \\ &= \sum_{d \leq x^{1/3}, P(d) \leq Y} \frac{f_\vartheta(d)\Psi_d(x,y)}{\varphi(d)} + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log x}\right).\end{aligned} \tag{25}$$

La contribution à la dernière somme des d vérifiant $\omega(d) \geq \sqrt{y}$ est majorée par

$$O(\mathrm{e}^{-c_2\sqrt{y}}(\log x)\Psi(x,y)) = O(\Psi(x,y)/\log x).$$

Notons temporairement $m = m(d) := d_y$ le plus grand diviseur y-friable de d. Lorsque $\omega(d) \leq \sqrt{y}$, l'estimation (9) du Lemme C fournit

$$\Psi_d(x,y) = \Psi_m(x,y) = g_m(\alpha)\Psi(x,y)\left\{1 + O\left(\frac{E_m(1+E_m)}{u}\right)\right\} \tag{26}$$

$$\text{avec}\quad E_m = O\Big((\log u)^{-1}\gamma_m \exp\{2\gamma_m\}\Big) = O\left(\frac{\omega(d)}{\log y}\right)$$

et où $g_m(\beta)$ est défini en (2). On a en effet $\gamma_m \leq \log(\omega(m)+2)/4$ quitte à supposer c suffisament grand. On reporte l'estimation (26) dans (25) : le terme d'erreur induit est dominé par

$$\frac{\Psi(x,y)}{u\log y}\sum_{P(d)\leq Y}\frac{|f_\vartheta(d)|\omega(d)^2}{\varphi(d)} \ll \Psi(x,y)\frac{\log Y}{\log x} = \frac{\Psi(x,y)}{(\log_2 x)^c}.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S^*(x,y)} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} &= \Psi(x,y)\sum_{\substack{d\leq x^{1/3}, P(d)\leq Y\\ \omega(d)\leq\sqrt{y}}}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)} + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\right)\\ &= \Psi(x,y)\sum_{d\leq x^{1/3}, P(d)\leq Y}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)} + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\sum_{d>x^{1/3}, P(d)\leq Y}\frac{|f_\vartheta(d)|}{\varphi(d)} \ll \int_{x^{1/3}}^\infty \frac{d\Psi(z,Y)}{z} \ll (\log Y)\mathrm{e}^{-(\log x)/6\log Y} \ll \frac{1}{\log x}.$$

On obtient donc

$$\sum_{n\in S^*(x,y)} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n-1,Y)/\sqrt{\xi}} = \Psi(x,y)\sum_{P(d)\leq Y}\frac{f_\vartheta(d)g_{m(d)}(\alpha)}{\varphi(d)} + O\left(\frac{\Psi(x,y)}{\log_2 x}\right).$$

Quitte à supposer c assez grand on a $\sum_p p^{-1-\alpha} \ll 1$, et les calculs de [4] (en particulier ceux menant à la formule (7.16)) montrent que le terme principal du membre de droite vaut

$$\begin{aligned}&\Psi(x,y)\;\exp\{(\mathrm{e}^{i\vartheta/\sqrt{\xi}}-1)\xi + O(\vartheta/\sqrt{\xi})\}\\ &\quad= \begin{cases}\Psi(x,y)\mathrm{e}^{i\vartheta\sqrt{\xi}-\vartheta^2/2}\left\{1 + O((\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi})\right\} & \text{si } 0\leq\vartheta\leq\xi^{1/6}\\ O(\Psi(x,y)\mathrm{e}^{-c_4\vartheta^2}) = O(\Psi(x,y)/\xi) & \text{si } \xi^{1/6}\leq\vartheta\leq\sqrt{\xi}\end{cases}\end{aligned}$$

pour un certain $c_4 > 0$, on a donc, en notant que $\log_2 x \sim \xi$,

$$R(x,y;\vartheta) \ll \begin{cases}\mathrm{e}^{-\vartheta^2/2}(\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi} + 1/\xi & \text{si } 0\leq\vartheta\leq\xi^{1/6}\\ 1/\xi & \text{si } \xi^{1/6}\leq\vartheta\leq\sqrt{\xi}\end{cases} \tag{27}$$

En regroupant les estimations (23) et (27) on obtient

$$R(x,y;\vartheta) \ll \begin{cases} \vartheta & \text{si } 0 \leq \vartheta \leq 1/\xi \\ \mathrm{e}^{-\vartheta^2/2}(\vartheta+\vartheta^3)/\sqrt{\xi} + 1/\xi & \text{si } 1/\xi \leq \vartheta \leq \sqrt{\xi}. \end{cases}$$

En injectant dans (21), cela fournit finalement

$$\sup_{t\in\mathbf{R}} \left| \frac{\Psi^*(x,y;t)}{\Psi(x,y)} - \Phi(t) \right| \ll \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

Cela démontre le Théorème 2 grâce à l'estimation (20).

References

[1] J. Basquin. Valeurs moyennes de fonctions multiplicatives sur les entiers friables translatés. *Acta Arith.*, 145:285–304, 2010.

[2] R. de la Bretèche and G. Tenenbaum. Propriétés statistiques des entiers friables. *Ramanujan J.*, 9:139–202, 2005.

[3] É. Fouvry and G. Tenenbaum. Diviseurs de Titchmarsh des entiers sans grand facteur premier. *Analytic Number Theory*, pages 86–102, 1990.

[4] É. Fouvry and G. Tenenbaum. Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc.*, 3(3):481–514, 1996.

[5] A. Granville. Integers, without large prime factors, in arithmetic progressions. II. *Phil. Trans. Royal Soc. London*, 345(1676):349–362, 1993.

[6] A. J. Harper. Bombieri-Vinogradov and Barban-Davenport-Halberstam type theorems for smooth numbers. *pré-publication*, 2012.

[7] A. J. Harper. On a paper of K. Soundararajan on smooth numbers in arithmetic progressions. *J. Number Theory*, 132(1):182–199, 2012.

[8] A. Hildebrand. Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis. *Mathematika*, 31(02):258–271, 1984.

[9] A. Hildebrand. On the number of positive integers $\leq x$ and free of prime factors $> y$. *J. Number Theory*, 22(3):289–307, 1986.

[10] A. Hildebrand and G. Tenenbaum. On integers free of large prime factors. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296(01):265–290, 1986.

[11] B. Landreau. A new proof of a theorem of van der Corput. *Bull. London Math. Soc.*, 21:366–368, 1989.

[12] S. S. Loiperdinger and I. E. Shparlinski. On the distribution of the Euler function of shifted smooth numbers. *Colloq. Math.*, 120(1):139–148, 2010.

[13] K. Soundararajan. The distribution of smooth numbers in arithmetic progressions. *Anatomy of Integers*, pages 115–128, 2008.

[14] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*. Belin, troisième edition, 2007.

CRM - Université de Montréal, Pavillon André Aisenstadt, 2920 chemin de la Tour, Montréal, QC, H3T 1J4, Canada

E-mail address: `drappeaus@dms.umontreal.ca`